Nom : Aïchevall / Ellron École : Errja (Arafat).

Exercices sur Intégrales

Exercice 1 :

on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x\,dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x\,dx$,

1 Calculer $I + J$

2 En utilisant une intégration par parties, Calculer $I - J$.

3 En déduire I et J.

Solution :

1 $I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin^2 x + x\cos^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1})\,dx$

$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I+J = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0^2\right] \Rightarrow I+J = \frac{\pi^2}{8}$

$\boxed{\begin{array}{l}\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \\ \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x\end{array}}$

2 on a : $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin^2 x - x\cos^2 x)\,dx \Rightarrow$

$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{1})\,dx \Rightarrow I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x\cos 2x)\,dx$

donc $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x\cos 2x)\,dx$.

on utilise une intégration par parties :

on pose : $\begin{cases} u(x) = -x \\ v'(x) = \cos 2x \end{cases}$ Alors : $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

Comme : $\int uv' = u.v - \int u'v$

$I - J = \left[-x \times \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$

$I - J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)\,dx \Rightarrow I - J = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I - J = -\frac{1}{4}\cos\pi + \frac{1}{4}\cos 0 \Rightarrow I - J = \frac{1}{2}$

on résout le système $\begin{cases} I + J = \frac{\pi^2}{8} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases}$

Par addition : $2I = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi^2 + 8}{16}$.

Par soustraction $2J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \Rightarrow J = \frac{\pi^2 - 8}{16}$

$\boxed{2}$ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a : $f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x) \overset{?}{=} 1$

si $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, on a : $f(\frac{\pi}{2}-x) = \dfrac{1}{1+\tan^{2012}(\frac{\pi}{2}-x)} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{\tan^{2012}x}} = \dfrac{\tan^{2012}x}{\tan^{2012}x+1}$

donc : $f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x) = \dfrac{\tan^{2012}x}{1+\tan^{2012}x} + \dfrac{1}{1+\tan^{2012}x} = 1$

$\boxed{3}$ $f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1$ est de la forme :

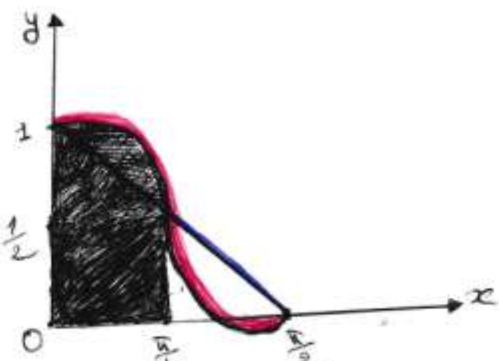
$f(2a-x)+f(x)=2b$ avec $(a,b)=(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2})$.

Alors : le pt $\Omega(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2})$ est un Centre de Symetrie $\mathcal{C}_f$ on deduit le T.V de f et sa Courbe :

T.V de f

x	0		$\frac{\pi}{2}$
f'	0	$-$	0
f	1	$\searrow$	0

Courbe de f ↓



Comme : f est continue et possitive sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ l'aire du domaine plan limité par $\mathcal{C}_f$, on est les droite $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$ est Calculer par $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

D'autrepart, par symetrie, Celle aire est egale à l'aire du triangle de base $\frac{\pi}{2}$ et de hauteur 1, doné : $S = \dfrac{\frac{\pi}{2}\times 1}{2} = \frac{\pi}{4}$

donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{\pi}{4}$

Autre Méthode : par integration de : $f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1$, on obtient : ①

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2}-x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx$

on pose : $t=\frac{\pi}{2}-x$ $\begin{cases} x=0 \Leftrightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t=0 \\ dt=-dx \Rightarrow dx=-dt \end{cases}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2}-x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(t).(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t).dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x).dx$

on remarque que si on remplaçant dans ①

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{\pi}{2}-0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{\pi}{4}$

FIN

Nom : Aïchevalle /Ellbou. École : Erraja (Arafat).

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{1+\tan^{2012} x}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ f(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

1. Montre que f est continue, positive, décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
2. Montre que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $f(\frac{\pi}{2} - x) + f(x) = 1$
3. Interpréter le résultat précédent graphiquement. En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{\pi}{4}$.

Solution :

1. $\dfrac{1}{1+\tan^{2012} x} = \dfrac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{2012}} \Rightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

$* \; k=0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, $\quad * \; k=1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi \; (> \frac{\pi}{2})$, $\quad * \; k=-1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \pi \; (<0)$.

x	0 $\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	$+$
$\sin x$	0 $+$
$\tan x$	0 $+$

Donc : $\tan x \geq 0$ d'où : $(\tan x)^{2012} \geq 0 \Rightarrow 1 + \tan^{2012} x \geq 0$

D'où $\dfrac{1}{1+\tan^{2012} x} \geq 0$

f est strictement positive (+) sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ D'autre part $f(\frac{\pi}{2}) = 0$

D'où : f est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Etudions sa continuité à gauche en $\frac{\pi}{2}$, $f(\frac{\pi}{2}) = 0$

et : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{2012}} = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{0^+}\right)^{2012}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

Donc : $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} f(x) = f(\frac{\pi}{2})$, d'où f est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$*$ on a aussi : $f'(x) = \dfrac{-2012(1+\tan^2 x) \times \tan^{2011} x}{(1+\tan^{2012} x)^2} < 0$ (car f sous forme $\frac{1}{u}$).

$*$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\Leftrightarrow f$ est $\searrow$ est sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

$*$ d'autre part f est positive et $f(\frac{\pi}{2}) = 0$

d'où : f est décroissante $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$I_5 = \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2}\,dx$, $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=2 \Rightarrow t=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{1}{2t}\,dx$.

$\Rightarrow dx = 2t\,dt$; on a : $t^2 = x+1$.

$\Rightarrow x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$

$x^2+3x+2 = t^2(t^2+1) \Leftrightarrow I_5 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2(t^2+1)} \times 2t\,dt \Leftrightarrow I_5 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t}{t^2(1+t^2)}\,dt$

$$I_5 = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

On pose : $\boxed{t = \tan u} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Leftrightarrow \tan u = 1 \Rightarrow \boxed{u = \frac{\pi}{4}} \\ t=\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan u = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{u = \frac{\pi}{3}} \end{cases}$

$dt = (1+\tan^2 u)\,dx$

$I_5 = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 u}{1+\tan^2 u}\,dx = [2u]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\times\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow I_5 = \frac{\pi}{6}$.

$I_4 = \int_1^2 \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x+1}}$, $t = x-1 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Leftrightarrow t=1 \\ x=3 \Leftrightarrow t=2 \end{cases} \Leftrightarrow dx = dt$

$I_4 = \int_1^2 \frac{(t+1)^3}{\sqrt{t}}\,dt$, $I_4 = \int_1^2 \frac{t^3+3t^2+3t+t}{t^{1/2}}\,dt = \int_1^2 \left(\frac{t^3}{t^{\frac{1}{2}}} + \frac{3t^2}{t^{\frac{1}{2}}} + \frac{3t}{t^{\frac{1}{2}}} + \frac{t}{t^{\frac{1}{2}}}\right)dt$

$I_4 = \int_1^2 (t^{5/2} + 3t^{3/2} + 3t^{1/2} + 3t^{1/2}) \Leftrightarrow I_4 = \int_1^2 (t^{5/2} + 3t^{3/2} + 3t^{\frac{1}{2}} + 3t^{\frac{1}{2}})\,dt$

$I_4 = \left[\frac{1}{\frac{5}{2}+1} t^{\frac{5}{2}+1} + \frac{3}{\frac{3}{2}+1} t^{\frac{3}{2}+1} + \frac{3}{\frac{1}{2}+1} t^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} t^{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^2$.

$I_4 = \left[\frac{2}{7}t^{7/2} + \frac{6}{5}t^{5/2} + 2t^{3/2} + 2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^2 \Leftrightarrow I_4 = \left[\left(\frac{2}{7}t^3 + \frac{6}{5}t^2 + 2t + 2\right)\sqrt{t}\right]_1^2$

$I_4 = \left(\frac{16}{7} + \frac{24}{5} + 6\right)\sqrt{2} - \left(\frac{2}{7} + \frac{6}{5} + 4\right)$

$I_4 = \left(\frac{458}{35}\right)\sqrt{2} - \frac{192}{35}$.

FIN

Nom : Aïchevalle / Elbou   École : Erraja (Arafat).

Exercice 3 :

En utilisant le changement de variable, Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{(4x+5)^5}$, $t = 4x+5$; $I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$, $x = \tan t$

$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4dx}{1+\cos x}$, $t = \tan\frac{x}{2}$; $I_4 = \int_2^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$, $t = x-1$

$I_5 = \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2}dx$, $t = \sqrt{1+x}$ puis $t = \tan u$.

Solution :

Rappel (Méthode du changement de variable) :

1. Changement des bornes
2. Relation entre différentielle
3. Remplacement
4. Calcule

$I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{(4x+5)^5}$, $t = 4x+5$

$\begin{cases} x = 1 \Leftrightarrow t = 9 \\ x = 2 \Leftrightarrow t = 13 \end{cases}$ $\Rightarrow dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{1}{4}dt$

$I_1 = \int_9^{13} \frac{1}{t^5} \times \frac{1}{4}dt \Rightarrow I_1 = \int_9^{13} \frac{1}{4} \times t^{-5}dt$.

$I_1 = \left[\frac{1}{4} \times \frac{1}{-4} t^{-4}\right]_9^{13} = \left[-\frac{1}{16}t^{-4}\right]_9^{13} \Leftrightarrow I_1 = \frac{-1}{16}(13^{-4} - 9^{-4})$

$I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$, $x = \tan t$; $x = 1 \Rightarrow \tan t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$; $x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan t = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$ $\Leftrightarrow dx = (1+\tan^2 t)dt$

$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cancel{1+\tan^2 t}}{\cancel{1+\tan^2 t}} dt \Rightarrow I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt = [t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow I_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{\pi}{12}$

$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4dx}{1+\cos x}$, $t = \tan(\frac{x}{2})$. $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \tan 0 = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow dt = \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})dx$

$dx = \frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \cdot 2dt \Rightarrow dx = \cos^2\frac{x}{2}dt$ D'autre part : $1+\cos x = \cos^2\frac{x}{2}$

donc : $I_3 = \int_0^1 \frac{4 \times 2\cos^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int_0^1 4dt = [4t]_0^1 \Rightarrow I_3 = 4$

Rappel : $\begin{cases} 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \end{cases}$

$\frac{1}{1+\tan\frac{\alpha}{2}} = \cos^2\frac{\alpha}{2}$

$1 + \tan\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$, on pose : $\begin{cases} U(x)=x^n \\ \vartheta'(x)=\sqrt{1-x} \end{cases}$ alors : $\begin{cases} U'(x)=nx^{n-1} \\ \vartheta(x)=-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \end{cases}$

$$\int_0^1 U(x)\vartheta'(x)dx = [U(x).\vartheta(x)]_0^1 - \int_0^1 n.x^{n-1} + \left(-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\,dx\right).$$

$$\Rightarrow \int_0^1 U(x).\vartheta'(x)dx = 0 + \frac{2n}{3}\int_0^1 (x^{n-1}-x)\sqrt{1-x}\,dx$$

$$I_n = \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}\,dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx \Rightarrow I_n = \frac{2n}{3}(I_{n-1}-I_n)$$

$$\Rightarrow 3I_n = 2n(I_{n-1}-I_n)$$

$$3I_n = 2nI_{n-1} - 2nI_n \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

4) Comme $\forall x \in \mathbb{N}^*$, $(2n+3)I_n = 2nI_{n-1}$

on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$,

Donc : $I_1 = \frac{2}{5}I_0$

$I_2 = \frac{4}{7}I_1$

et En multipliant membre à membre :

$\vdots$

$I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$ on a : $I_n = \frac{2\times4\times6\times\dots 2n}{5\times7\times9\times\dots(2n+3)}\times I_0$, $\left(I_0 = \frac{2}{3}\right)$

et donc :

$$I_n = \frac{2}{3}\times\frac{2\times4\times6\times\dots 2n}{5\times7\times9\times\dots(2n+3)},$$ En multipliant le numérateur et le dénominateur par :

$2\times4\times6\times\dots 2n(2n+2)$

donc :

$$I_n = \frac{2(2\times4\times6\dots\times2n)^2\times(2n+2)}{2\times3\times4\times5\times6\dots\times(2n+2)(2n+3)} = \frac{2(2\times1)(2\times2)(2\times3)\times\dots(2\times n)^2\times2(n+1)}{(2n+3)!}$$

$$I_n = \frac{2(2\times2\times2\dots)\times(1\times2\times3\times\dots\times n)^2\times2(n+1)}{(2n+3)!} = \frac{2(2^n+n!)^2\times2(n+1)}{(2n+3)!}$$

$$I_n = \frac{(2\times(2^n)^2+(n!)(n+1)}{(2n+3)!} = \frac{2^2\times2^{2n}+n!(n+1)}{(2n+3)!}$$

donc : $$I_n = \frac{2^{2n+2}\,n!(n+1)}{(2n+3)!}$$

Nom: Aïcheroulle /Elbou. É Cole: Erraja (Arafat).

Exercice 4 :

Soit la fonction definie par $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$ ou $n \in \mathbb{N}$ pour tout entier naturel n on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1. Calculer $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$ et montrer que : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

2. Montrer que la suite (I_n) est decroissante et positive. Endeduire qu'elle est Convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3. En utilisant une intégration par parties, montrer que: $(2n+3)I_n = 2nI_{n-1}$

4. prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{2^{2n+2}\, n!\,(n+1)!}{(2n+3)!}$

Solution :

1. $I_0 = \int_0^1 x^0\sqrt{1-x}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$

$I_0 = -\int_0^1 (-1)(1-x)^{\frac{1}{2}}dx = -\int_0^1 U'(x).(U(x))^{\frac{1}{2}}dx$

avec: $U(x) = 1-x$ donc : $I_0 = -\left[\dfrac{(1-x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1$

$I_0 = -\left[\frac{2}{3}(1-x)\times\sqrt{1-x}\right]_0^1 = -\left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow I_0 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$.

$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1-x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{1-x} \leq 1$

et En multipliant par x^n ($x^n \geq 0$) ona:

$0 \leq x^n\sqrt{1-x} \leq x^n$ donc: $0 \leq \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx \leq \int_0^1 x^n.dx$.

$0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

2. $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$, $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}.\sqrt{x-1}\,dx$.

ona : $0 \leq x \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$, ona:

$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^{n+1}\sqrt{1-x}\,dx \leq x^n\sqrt{1-x} \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,dx \leq \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$

Cad: $\forall x \in \mathbb{N}$: $0 \leq I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow$ donc: La Suite (I_n) est decroissante et positive

et Comme (I_n) est ↘ et minoré par 0 donc: I_n est Convergente.

or: $\forall x \in \mathbb{N}$: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc: d'après le T-gendarme $\lim\limits_{+\infty} I_n = 0$

Nom: Aïchetou Elbou

École: Erraja (Arafat).

Exercice 5:

soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par:

$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

on pose: $I = \int_0^1 \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$, $J = \int_0^1 \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} dx$.

Calculer: $f'(x)$, En déduire I et J.

Solution:

on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1 = \frac{2x + 2\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}}$

$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}$

L'intégrale $I = \int_0^1 \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$, peut être sous la forme:

$I = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} (x+\sqrt{x^2+1}) dx$

D'où: $I = \left[\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+1})^2\right]_0^1$

$I = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}(1)^2$, Enfin: $\boxed{I = \frac{-1+2\sqrt{2}}{2}}$

L'intégrale: $J = \int_0^1 \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} dx$: $(u^n.u'$, P: $\frac{1}{n+1}.u^{n+1})$.

peut être sous forme:

$J = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} dx$ $\left(\frac{u'}{u^2}, \text{P}: -\frac{1}{u}\right)$.

d'où: $\boxed{J = \left[\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]_0^1} \Leftrightarrow J = \frac{-1}{1+\sqrt{2}} + 1$

Enfin: $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = J}$.